Dossier n°15 : Exemples d'étude de situations conduisant à des régionnement de la droite ou du plan à partir d'inéquations du premier et du second degré.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 31 octobre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

En classe de troisième, les élèves apprennent à résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques et à représenter ses solutions sur une droite graduée. Ils apprennent également à résoudre des problèmes du premier degré ou s'y ramenant.

En classe de Seconde, les élèves étudient la résolution algébrique et la résolution graphique d'équations et d'inéquations : en particulier, ils apprennent à apprécier les avantages et les limites de ces deux types de résolution.

En classe de Première ES, les élèves travaillent sur des exemples de systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues ainsi que la résolution d'équations et d'inéquations du second degré.

Je choisis donc de situer ce dossier en classe de troisième et de Première ES.

II Commentaires généraux.

Pour ce dossier, on supposera connues les définitions de droites et de plans.

En particulier, toute droite du plan a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a ;b) \neq (0 ;0)$.

Rappelons la définition utile d'un demi-plan :

<u>Définition :</u>

Le demi-plan supérieur (resp. **inférieur**) **défini par la droite d'équation $ax + by +c = 0$** est l'ensemble des points de coordonnées $(x ;y)$ telles que $ax + by +c > 0$ (resp. $ax + by +c < 0$) (on dit alors que **le demi-plan est ouvert**) ou $ax + by +c \geq$ (resp. $ax + by +c \leq$) (on dit alors que **le demi-plan est fermé**).

Par suite, toute droite du plan partage le plan en deux demi-plans : la droite est la frontière de ces deux demi-plans.

Le but de ce dossier est donc de résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une ou plusieurs inéquations par des considérations graphiques qui partageront le plan ou une droite en plusieurs régions.

Pour cela, on utilisera la méthode de résolution générale suivante (dans le plan) :

On souhaite résoudre l'inéquation $ax + by + c \geq$ (on peut toujours se ramener à une équation de ce type).

- On trace la droite D d'équation $ax + by +c = 0$.
- On déterminer le demi-plan défini par l'inéquation $ax + by + c \geq 0$. Pour cela, on choisit un point $M_o(x_0 ;y_0)$ dans l'un des demi-plans définis par la droite D.

Si $ax_0 + by_0 + c \geq 0$ alors M_0 appartient au demi-plan cherché et on hachure l'autre demi-plan.
Si $ax_0 + by_0 + c \leq 0$ alors M_0 n'appartient pas au demi-plan cherché et on hachure le demi-plan contenant M_0.

- L'ensemble des solution est l'ensemble de coordonnées des points appartenant à la partie non hachurée du plan.

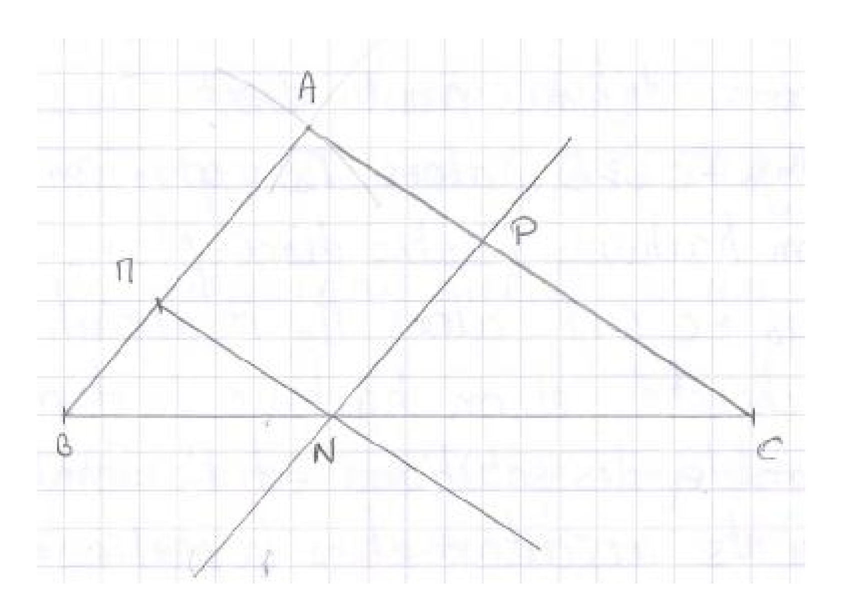
J'ai donc choisi de vous présenter trois exercices pour ce dossier :

- l'exercice n°1, au niveau de la troisième, dans le cadre de la géométrie ;
- l'exercice n°2, au niveau Première ES, dans une situation des sciences économiques ;

- l'exercice n°3, au niveau Première S, dans une situation de la vie quotidienne.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.



But : Déterminer l'ensemble des points M de [aB] tels que 5,5 < MN + NP < 6,5.

Méthode : En posant BM = x, calculer MN et NP et résoudre l'inéquation (cet exercice ne propose pas d'utiliser la méthode de résolution proposée précédemment).

Outil : Théorème de Thalès.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer la quantité de bibelots qu'une entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice.

C'est un exercice d'application de la résolution d'inéquations du second degré.

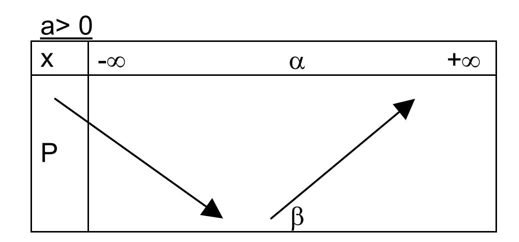
Méthode : Détermination du maximum d'une fonction trinôme.

Outil :

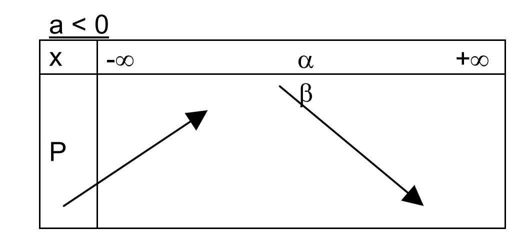
La courbe représentative d'une fonction trinôme P : $x \to ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole de sommet S(α ;β) avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

Suivant le signe de a, on obtient le sens de varaitions de la fonction P :

a> 0



a < 0



III.3 Exercice n°3.

But : Déterminer le nombre de boîtes que doit acheter une collectivité pour remplir certaines conditions.

Méthode : Déterminer un système d'inéquations traduisant les contraintes du problème.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°96 p 91, Bordas 3ème 1999).

1. a) Construire un triangle ABC tel que AB = 5cm, BC = 9cm et AC = 7cm.

   b) Placer sur le côté [AB] un point M distinct de A et B puis tracer la parallèle à la droite (AC) passant par M. Elle coupe le côté [BC] en un point N.

   c) Tracer la parallèle à la droite (AB) passant par N. Elle coupe le côté [AC] en un point P.
2. On pose BM = x cm.
   a) Calculer MN et Np en fonction de x.
   b) Où doit se trouver le point M pour avoir $5{,}5 < MN + NP < 6{,}5$. Colorier en rouge cette région.

IV.2 Exercice n°2 (n°2 p 101, Déclic 1ère ES).

Une entreprise fabrique un type de bibelots à l'aide d'un moule. Le coût de production d'une quantité q de bibelots est donné, en euros, par : $C(q) = 0{,}002q^2 + 2q + 4000$.

On suppose que toute la production, quelle que soit la quantité, est vendue au pris de 11 € le bibelot.

1. Exprimer la recette R(q) en fonction de la quantité q.
2. a) Etudier les variations de la fonction B définie sur $[0 ;+\infty[$ par :

$$B(q) = -0{,}002q^2 + 9q - 4000.$$

b) En déduire la quantité de bibelots à fabriquer (et à vendre) afin que le bénéfice réalisé par cette entreprise soit maximal.

c) Quelles quantités doit produire cette entreprise pour que la fonction de bénéfice soit positive ou nulle ? Représenter les courbes des fonctions mises en jeu (unité sur l'axe des abscisses : 1cm pour 500, sur l'axe des ordonnées : 1cm pour 5000€) et colorier en rouge la plage de production sui permet de réaliser un tel bénéfice.

IV.3 Exercice n°3 (n°65 p 91, Déclic 1ère ES 2001).

Une collectivité veut acheter trois sortes de biscuits : des croquants, des navettes et des madeleines. Ces biscuits sont vendus en deux conditionnements différents : des boîtes carrées et des boîtes rondes.

- Une boîte carrée contient 12kg de croquants, 4kg de navettes et 3kg de madeleines.
- Une boîte ronde contient 3 kg de croquants, 2kg de navettes et 4kg de madeleines.

Cette collectivité veut au moins 60kg de croquants, au moins 32kg de navettes et au moins 36kg de madeleines.

Soit x le nombre de boîtes carrées et y le nombre de boîtes rondes achetées.

1. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes du problème.
2. Représenter dans un repère orthogonal l'ensemble des points M(x ;y) qui vérifient le système d'inéquations.